C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada Vol. **28** (3) 2006, pp. 85–90

SUR LES GROUPES DE $\bar\partial_B$-COHOMOLOGIE DES COURANTS D'ORDRE L

MOUSSA BALDE, SALOMON SAMBOU ET BOCAR TOURE

Présenté par Ed Bierstone, FRSC

RÉSUMÉ. Nous montrons essentiellement dans ce travail que l'application naturelle entre le groupe de $\bar\partial_b$-cohomologie des courants d'ordre l et celui des courants est un isomorphisme pour certains bidegrés dans les variétés CR-q-concaves.

ABSTRACT. In this work we show mainly that the natural map between the $\bar\partial_b$-cohomology group of currents of order l and that of currents is an isomorphism for some bidegrees on q-concave CR-manifolds.

1. **Introduction.** Soit M une variété CR générique et soit $D_l^{p,q}(M)$, $l = 0, 1, \dots, \infty$, l'espace des formes différentielles de classe C^l sur M à support compact.

On sait que

$$D_0^{p,q}(M) \supset D_1^{p,q}(M) \supset \cdots \supset D_\infty^{p,q}(M).$$

Par dualité on a

$$\big(D_\infty^{p,q}(M)\big)' \supset \cdots \supset \big(D_1^{p,q}(M)\big)' \supset \big(D_0^{p,q}(M)\big)',$$

où $\big(D_l^{p,q}(M)\big)'$, $l = 0, 1, \dots,$ est l'espace des (p,q)-courants d'ordre l et $\big(D_\infty^{p,q}(M)\big)'$ celui des courants sur M. Si on note

$$Z_{l,\mathrm{cur}}^{p,q}(M) = \big(D_l^{p,q}(M)\big)' \cap \ker \bar\partial_b \quad \text{et} \quad E_{l,\mathrm{cur}}^{p,q}(M) = \bar\partial_b\big(D_l^{p,q-1}(M)\big)'$$

dont le $\bar\partial_b$ est d'ordre l, alors

$$H_{l,\mathrm{cur}}^{p,q}(M) = \frac{Z_{l,\mathrm{cur}}^{p,q}(M)}{E_{l,\mathrm{cur}}^{p,q}(M)}$$

désigne le (p,q)-ième groupe de $\bar\partial_b$-cohomologie des courants d'ordre l. Notons qu'en général on n'a pas

$$H_{0,\mathrm{cur}}^{p,q}(M) \supset H_{1,\mathrm{cur}}^{p,q}(M) \supset \cdots \supset H_{\infty,\mathrm{cur}}^{p,q}(M).$$

On s'est souvent intéressé à l'application naturelle de

$$H_\infty^{p,q}(M) \mapsto H_{\infty,\mathrm{cur}}^{p,q}(M),$$

Reçu le 24 mars, 2006.
Classification (de l'AMS): 32F40, 32F10, 32F20.
Mots clés: variétés CR, q-concave, $\bar\partial_b$-cohomologie, courants d'ordre l.

où $H^{p,r}_{\infty}(M)$ désigne le (p,r)-ième groupe de $\bar{\partial}_b$ cohomologie des formes différentielles de classe C^∞ sur M [4], [8]. Jusque là les méthodes utilisées ne permettent aucune conclusion sur l'application naturelle :

$$\mathcal{NAT}\, H^{p,q}_{l,\mathrm{cur}}(M) \mapsto H^{p,q}_{\mathrm{cur}}(M).$$

Dans ce travail nous montrons en partant des résultats de [9] que pour certains bidegrés,

$$\mathcal{NAT}\colon H^{p,q}_{l,\mathrm{cur}}(M) \mapsto H^{p,q}_{\mathrm{cur}}(M)$$

est un isomorphisme. Ce résultat conduit à quelques applications que nous énonçons sous forme de corollaires.

2. Résultats.

Théorème 2.1. *Soit X une variété analytique complexe de dimension n et M une sous-variété* CR *générique de codimension k de X. On suppose que M est q-concave pour $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$. Alors l'application naturelle*

$$\mathcal{NAT}\colon H^{0,r}_{l,\mathrm{cur}}(M) \mapsto H^{0,r}_{\infty,\mathrm{cur}}(M), \quad l = 0, 1, \dots$$

est un isomorphisme si $0 \leq r \leq q-1$, où $r \geq n-q-k+2$ et elle est surjective pour $r = n-k-q+1$.

Proof. On a d'après [9], l'application naturelle

$$H^{0,r}_{\infty}(M) \mapsto H^{0,r}_{\infty,\mathrm{cur}}(M)$$

est un isomophisme pour $0 \leq r \leq q-1$ ou $r \geq n-k-q+2$ et est surjective pour $r = n-k-q-1$.

Nous allons montrer que

$$H^{0,r}_{\infty}(M) \mapsto H^{0,r}_{l\,\mathrm{cur}}(M)$$

est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$, ou $r \geq n-q-k+2$ et elle est surjective pour $r = n-k-q+1$.

(a) Injectivité
Soit f une $(0,r)$ forme différentielle avec $0 \leq r \leq q-1$, ou $r \geq n-q-k+2$, telle que $f = \bar{\partial}_b S$ ou S est une $(0, r-1)$ courant d'ordre l sur M. On a d'après la formule de régularisation de [9]

$$S = R_\epsilon S + \bar{\partial}_b A_\epsilon S + A_\epsilon f,$$

avec $A_\epsilon S$ qui augmente la régularité de $\frac{1}{2}$, $f = \bar{\partial}_b S = \bar{\partial}_b(A_\epsilon f + R_\epsilon S)$, $A_\epsilon f + R_\epsilon S$ étant une forme différentielle de classe C^∞. Donc f représente aussi la classe nulle dans $H^{0,r}_{\infty}(M)$.

(b) Surjectivité
Soit T un courant d'ordre l de bidegré $(0, r)$, $\bar{\partial}_b$ fermé avec $0 \leq r \leq q-1$, ou $r \geq n-q-k+1$, alors d'après la formule de régularisation de [9],

$$T = R_\epsilon T + \bar{\partial}_b A_\epsilon T$$

et $A_\epsilon T$ augmente la régularité. Donc il existe une forme différentielle de classe C^∞; $R_\epsilon T$ telle que $T - R_\epsilon T$ représente la classe nulle dans $H^{0,r}_{\infty,\mathrm{cur}}(M)$, car $T - R_\epsilon T$ étant un courant d'ordre l, $\bar{\partial}_b A_\epsilon T$ est d'ordre l.

De la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H^{0,r}_\infty(M) \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & H^{0,r}_{l,\mathrm{cur}}(M) \arrow[dl, "g"] \\ & H^{0,r}_{\infty,\mathrm{cur}}(M) & \end{tikzcd}$$

où e, f et g sont des applications naturelles, on a l'application naturelle :

$$g\colon H^{0,r}_{l,\mathrm{cur}}(M) \longrightarrow H^{0,r}_{\infty,\mathrm{cur}}(M)$$

qui est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$ ou $n-k-q+2 \leq r \leq n-k$.

Pour $r = n-k-q+1$ on a $f = g \circ e$ avec f est surjective. Donc g est surjective.

Corollaire 2.1. *Soient $E^{p,r}_l(M)$, l'espace des (p, r)-formes différentielles de classe C^l sur M qui sont le $\bar{\partial}_b$ d'une $(p, r-1)$-forme différentielle de classe C^l et $Z^{p,q}_l(M)$, l'espace des (p, q) formes différentielles de classe C^l sur M, $\bar{\partial}_b$ fermées.*

Si M est q-concave à l'infini, alors $H^{0,r}_{l\,\mathrm{cur}}(M)$ est de dimension finie pour $0 \leq r \leq q-2$ et $H^{0,q-1}_{l\,\mathrm{cur}}(M)$ est séparé.

Mieux si on a

$$E^{0,q-1}_l(M) = \Big\{ f \in C^{0,q-1}_l(M) \;\Big|\; \int_M f \wedge \phi = 0, \quad \forall \phi \in Z^{n,n-q-k+1}_l(M) \text{ à support compact} \Big\},$$

alors on montre simplement que

$$E^{0,q-1}_{l\,\mathrm{cur}}(M) = \{ T \in D'^{0,q-1}(M) \mid \langle T, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in Z^{n,n-q-k+1}_l(M) \text{ à support compact} \}.$$

Remarque 2.1. Pour les définitions de variétés q-concaves, q-concaves à l'infini, régulièrement q-concaves et régulièrement q-concaves à l'infini voir par exemple dans [10].

Proof. Si M est q-concave à l'infini, alors M est q-concave. On a d'après [9] et le théorème 2.1

$$H_l^{0,r}(M) \sim H_\infty^{0,r}(M) \sim H_{l\,\mathrm{cur}}^{0,r}(M) \sim H_{\infty,\mathrm{cur}}^{0,r}(M) \tag{1}$$

pour $l = 0, 1, 2, \ldots$, et $0 \leq r \leq q-1$, où $H_l^{0,r}(M)$ désigne le $(0, r)$-ième groupe de $\bar\partial_b$ cohomologie des formes différentielles de classe C^l dont le $\bar\partial_b$ est de classe C^l.

Nous savons (voir [7]) que si M est q-concave à l'infini $H_\infty^{0,r}(M)$ est de dimension finie pour $0 \leq r \leq q-2$, donc $H_{l\,\mathrm{cur}}^{0,r}(M)$ est de dimension finie si $0 \leq r \leq q-2$.

Pour $r = q-1$, on a le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Soit X une variété analytique complexe de dimension n et M une sous-variété* CR *générique de classe C^∞ de X. On suppose que :*

(a) *M est de codimension k,*
(b) *M est q-concave à l'infini,* $2 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$.

Alors $H_\infty^{0,q-1}(M)$ est séparé.

Preuve du théorème 2.2. La preuve de ce théorème est identique à celle de [10] où ce résultat est établi pour les variétés régulièrement q-concaves à l'infini. Il suffit de remplacer dans [10] les sections de Leray qui viennent de [1] qui donnent la formule de Bochner–Martinelli–Koppelman (BMK) pour les variétés CR génériques régulièrement q-concaves par les sections qui proviennent de [2] et pour lesquelles on a (BMK) pour les variétés q-concaves.

Comme $H_\infty^{0,q-1}(M)$ est séparé alors d'après (1), $H_{l\,\mathrm{cur}}^{0,q-1}(M)$ est séparé.

Pour achever la preuve du Corollaire 2.1, supposons que

$$E_l^{0,q-1}(M) = \Big\{ f \in C_l^{0,q-1}(M) \;\Big|\; \int_M f \wedge \phi = 0, \\ \forall \phi \in Z_l^{n,n-q-k+1}(M) \text{ est à support compact} \Big\}.$$

On a naturellement

$$E_{l\,\mathrm{cur}}^{0,q-1}(M) \subset \{ T \in D_l'^{0,q-1}(M) \,|\langle T, \phi\rangle = 0, \\ \forall \phi \in Z_l^{n,n-q-k+1}(M) \text{ à support compact} \}.$$

Montrons l'inclusion dans l'autre sens.

Soit

$$T \in \{T \in D_l'^{0,q-1}(M) \mid \langle T,\phi\rangle = 0, \forall\phi \in Z_l^{n,n-q-k+1}(M) \text{ à support compact}\}.$$

T est $\bar{\partial}_b$-fermé. T représente une classe de cohomologie dans $H_{l\,\mathrm{cur}}^{0,q-1}(M)$.

De l'isomorphisme de l'application naturelle entre $H_l^{0,q-1}(M)$ et $H_{l\,\mathrm{cur}}^{0,q-1}(M)$ résulte l'existence d'une $(0,q-1)$ forme de classe C^l sur M, un $(0,q-2)$ courant d'ordre l sur M tels que $T = f + \bar{\partial}_b S$.

Soit ϕ une $(n, n-q-k+1)$ forme différentielle de classe C^l sur M, $\bar{\partial}_b$ fermée à support compact, on tire de $\langle T,\phi\rangle = 0$ que $\langle f,\phi\rangle = 0$, ce qui implique que $f \in E_l^{0,q-1}(M)$. C'est à dire qu'il existe une $(0,q-2)$ forme différentielle h de classe C^l sur M telle que $f = \bar{\partial}_b h$. Alors $T = \bar{\partial}_b(h+S)$ où S est un courant d'ordre l sur M. Donc $T \in E_{l\,\mathrm{cur}}^{0,q-1}(M)$. Ainsi

$$E_{l\,\mathrm{cur}}^{0,q-1}(M) = \{T \in D_l'^{0,q-1}(M) \mid \langle T,\phi\rangle = 0, \forall\phi \in Z_l^{n,n-q-k+1}(M) \text{ est à support compact}\}.$$

Partant encore de notre résultat principal nous avons la généralisation suivante du résultat (théorème 4.1) de [6].

Corollaire 2.2. *Soit M une sous-variété* CR *générique de codimension réelle k connexe, non compact, de classe C^∞, 1-concave dans une variété complexe de dimension n, $n \geq 3$.*

Alors $Z_l^{n,n-k-1}(M)$ est dense dans $Z_{l,\mathrm{cur}}^{n,n-k-1}(M)$ pour la topologie forte de $D'^{n,n-k-1}(M)$.

Proof. $D_l^{n,\cdot}(M)$ est réfléxif, d'aprés le théorème de Hahn–Banach, il suffit de montrer que pour tout $f \in D_l^{0,1}(M)$ telle que $\langle f,\phi\rangle = 0$, pour tout $\phi \in Z_l^{n,n-k-1}(M)$, on a

$$\langle T, f\rangle = 0, \forall T \in Z_{l,\mathrm{cur}}^{n,n-k-1}(M).$$

D'après un théorème de [5], $H_\infty^{n,n-k}(M) = 0$ donc séparé, et par isomorphisme $H_l^{n,n-k}(M) = 0$ donc séparé également.

Si $f \in D_l^{0,1}(M)$ telle que $\langle f,\phi\rangle = 0$, alors $f \in D_l^{0,1}(M) \cap E_{l,c\,\mathrm{cur}}^{0,1}(M)$, où $E_{l,c\,\mathrm{cur}}^{0,1}(M)$, est l'espace des $(0,1)$ courants d'ordre l à support compact qui sont le $\bar{\partial}_b$ d'une distribution d'ordre l à support compact, ($[f] \in H_{l,c\,\mathrm{cur}}^{0,1}(M)$ qui est séparé par dualité de Serre). Donc $f = \bar{\partial}_b S$ où S est un $(0,0)$ courant d'ordre l à support compact. D'après le corollaire 0.1 de [2], $f = \bar{\partial}_b g$ où g est une fonction de classe C^l à support compact. Par conséquent

$$\langle T, f\rangle = \langle T, \bar{\partial}_b g\rangle = \pm\langle \bar{\partial}_b T, g\rangle = 0.$$

References

1. M. Y. Barkatou et C. H. Laurent-Thiébaut, *Estimations optimales pour l'opérateur de Cauchy–Riemann tangentiel.* Prépubl. **593**, l'Institut Fourier, 2003.

2. ———, *Solutions fondamentales et estimations optimales pour l'opérateur de Cauchy–Riemann tangentiel.* Michigan Math. J., à paraître.

3. F. M. Cirka, *Regularization and $\bar\partial$ homotopy on a complex manifold.* Soviet Math. Dokl. **20** (1979), no. 1.

4. C. H. Laurent-Thiébaut et Y. Leiterer, *Dolbeaut Isomorphism for* CR*-Manifolds.* Math. Ann. **325** (2003), 165–189.

5. ———, *Malgrange's vanishing theorem in 1-concave* CR*-Manifold.* Nagoya Math. J. **157** (2000), 59–72.

6. ———, *Some applications of Serre duality in* CR*-Manifolds.* Nagoya Math. J. **154** (1999), 141–156.

7. H. Ricard, *Résolution avec régularité jusqu'au bord de l'équation de Cauchy–Riemann dans les domaines à coins et de l'équation de Cauchy–Riemann tangentielle en codimension quelconque.* Thèse de doctorat de mathématiques de l'Université Joseph Fourier (Grenoble I), 2002.

8. Salomon Sambou, *Résolution du $\bar\partial$ pour les courants prolongeables définis dans un anneau.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **11** (2002), 105–129.

9. ———, *Régularisation et $\bar\partial_b$-homotopie sur les variétés* CR. Prépubl. **642**, l'Institut Fourier, 2004; Math. Nachr., à paraître.

10. ———, *Théorème de séparation de type Andreotti–Vesentini sur les variétés* CR *génériques.* Ann. Mat. Pura Appl. **185** (2006), 381–394; DOI 10.1007/s10231-005-0158-4.

Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences et Techniques
UCAD
Dakar–Fann
Sénégal
courriel: *mbalde@ucad.sn*
ssambou@refer.sn
tourebocar@yahoo.fr