

POLYNÔMES CHROMATIQUES DE CERTAINS GRAPHES DE LA VIE RÉELLE

JASBIR S. CHAHAL AND OMAR KHADIR

Presented by George A. Elliott, FRSC

RÉSUMÉ. La conjecture des quatre couleurs affirme que toute carte géographique à bords continus nécessite au plus quatre couleurs pour être proprement colorée. Certains pays comme le Canada exigent en réalité seulement trois couleurs alors que d'autres, comme le Maroc, nécessitent eux quatre couleurs, trois ne suffisant pas.

Soit $k = k(X)$ le plus petit nombre de couleurs nécessaires au coloriage de la carte d'un pays X . Aucun calcul n'a été fait pour déterminer de combien de manières X peut-il être coloré avec les k couleurs même pour un seul pays pour lequel le problème n'est pas trivial. Dans ce travail, nous le réalisons pour deux pays : le Canada et le Maroc. Nous décrivons tous les outils mathématiques dont nous aurons besoin.

ABSTRACT. The four color conjecture states that any contiguous geographical entity needs at most four colors to color it properly. Some countries like Canada need actually only three colors whereas for others like Morocco three won't suffice. Let $k = k(X)$ be the least number of colors that suffice to color a country X . Someone has yet to compute in how many ways X can be colored with k colors, even for a single country X for which the problem is non-trivial. In this paper, we do it for the two countries Canada and Morocco. We provide all the mathematical tools that are necessary.

1. Introduction La conjecture des quatre couleurs, qui a été vérifiée seulement par des calculs sur ordinateur, dit que toute carte géographique d'un pays à bords continus, comme ceux possédant des états, requiert pas plus de quatre couleurs pour qu'elle soit proprement colorée. Par proprement, nous entendons dire que deux états adjacents doivent être colorés avec des couleurs différentes. Pour être adjacents ou voisins ils doivent partager une frontière de longueur strictement positive. Si deux états, par exemple Nunavut et Saskatchewan au Canada, se rencontrent en un seul point, nous ne les considérons pas comme adjacents ni comme voisins pour le coloriage. Le nombre chromatique d'un pays est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer proprement sa carte. A moins que les états d'un pays n'aient la forme de chemins ou de cycles pairs, le nombre chromatique de ce pays est au moins trois.

Received by the editors on May 5, 2019; revised June 17, 2019.
AMS Subject Classification: Primary: 05C15; secondary: 05C31.
© Royal Society of Canada 2019.

Un autre problème en lien avec cette question et sur lequel la littérature n'est pas abondante est le suivant. Soit $k = k(X)$ le nombre chromatique d'un pays X . De combien de façons peut-on colorer la carte du pays X ? A notre connaissance, aucun calcul n'a été fait pour le cas d'aucun pays que ce soit. Malheureusement la liste de nos références est réduite car à notre connaissance, personne n'a encore appliqué la théorie des graphes aux problèmes concrets du coloriage de cartes de pays.

L'objectif de ce travail est de calculer le nombre de façons de colorer les cartes géographiques du Canada et du Maroc. Le cas de ce dernier pays présente une difficulté non négligeable.

2. Terminologie Le problème que nous étudions fait partie de la théorie des graphes [2,1,3]. Nous rappelons de cette théorie tout ce qui est nécessaire à notre étude. De plus, afin d'éviter toute ambiguïté, nous définissons exactement ce que nous entendons par les termes que nous allons utiliser dans la suite.

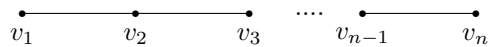
Un graphe est une paire $G = (V, E)$ où $V = V(G)$ est un ensemble fini dont les éléments sont les sommets du graphe G . Soit $P_2(V)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de V ayant exactement deux éléments, c'est-à-dire toutes les paires. L'ensemble $E = E(G)$ est un sous-ensemble de $P_2(V)$. Les éléments de $E(G)$ sont les arêtes de G . Si $E(G) = \emptyset$, l'ensemble vide, on note G par D_n et nous dirons que c'est le graphe totalement déconnecté à n sommets où $n = \text{Card}(V)$ est le cardinal de l'ensemble des sommets $V(G)$.

Si $E(G) = P_2(V)$, on parle de graphe complet à n sommets et on le note K_n . Deux sommets u et v sont adjacents ou voisins si $\{u, v\} \in E(G)$.

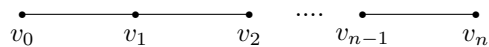
Il est commode et pratique de représenter un graphe à l'aide de points et d'arête $\{u, v\}$ par le diagramme $\bullet \text{---} \bullet$. Pour deux sommets distincts u et v , une boucle comme $\bullet \text{---} \circ$ n'est pas permise dans nos graphes. Il existe au plus une paire $\{u, v\} \in E(G)$. Autrement dit nos graphes sont simples et ne sont pas des multi-graphes pouvant avoir des arêtes comme $\bullet \text{---} \bullet$.

De plus puisque $\{u, v\} = \{v, u\}$, nos graphes sont non-orientés.

Certains graphes standards ont des noms et possèdent des symboles qui leur sont réservés. Un chemin P_n de longueur $n - 1$ est une chaîne



composée de sommets v_j tous distincts. Un cycle C_n de n sommets est un chemin fermé



avec $v_n = v_0$. Noter qu'un chemin ne peut pas être un cycle et réciproquement un cycle ne peut pas être un chemin. Par exemple les cycles C_3 et C_5 sont représentés dans la figure 1.

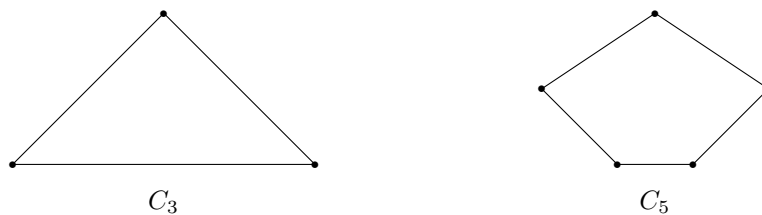


Figure 1 : les cycles C_3 et C_5

Une roue W_n de n sommets, ($n \geq 4$), est un graphe déduit du cycle C_{n-1} en joignant chacun de ses sommets à un nouveau sommet v_n .

Par exemple les roues W_4 et W_6 sont représentées dans la figure 2.

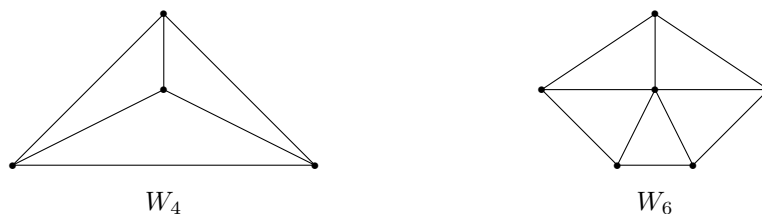


Figure 2 : les roues W_4 et W_6

Définition 1 : Deux graphes $G_j = (V_j, E_j)$, $j = 1, 2$, sont dits isomorphes, et l'on écrit $G_1 \cong G_2$, s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ telle que $\{u, v\} \in E_1$ si et seulement si $\{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Par exemple $P_2 \cong K_2$, $C_3 \cong K_3$ et $W_4 \cong K_4$.

Définition 2 : Un graphe $H = (W, F)$ est un sous-graphe du graphe $G = (V, E)$ si $W \subset V$ et $F \subset E$.

Il est évident que le nombre chromatique d'une roue W_n , pour laquelle $n \geq 4$ est un nombre pair, est 4. Par conséquent si un graphe contient un sous-graphe isomorphe à une roue paire, alors son nombre chromatique est au moins 4. Observer que le Canada n'a pas une telle configuration alors que c'est le cas pour le Maroc.

Définition 3 : Un graphe G est dit connexe si pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ de G , il existe un sous-graphe de G isomorphe au chemin

$$u = v_1 \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \dots \text{ --- } \bullet \text{ --- } v_n = v$$

qui part de u et aboutit à v .

Dans toute la suite nous supposons que les graphes sont connexes.

3. Graphes d'entités géographiques La carte d'un pays peut-être vue comme un graphe. Les états (ou régions) seront les sommets du graphe et deux états seront adjacents si et seulement si ils possèdent une frontière de longueur

strictement positive. Comme mentionné auparavant, aux USA, les états de l'Arizona et du Colorado ne sont pas adjacents. La figure 3 illustre le graphe du Maroc. Nous l'appellerons G_M et nous numérotons ses régions de 1 à 12.

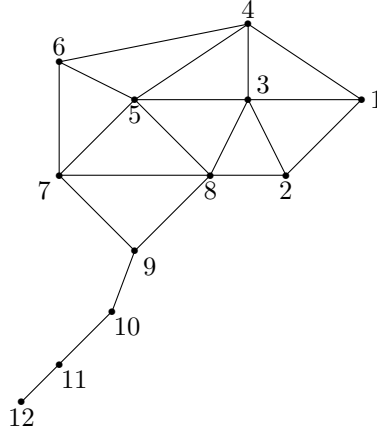


Figure 3 : Le graphe G_M du Maroc

Puisque G_M contient une roue W_6 comme sous-graphe, son nombre chromatique est au moins 4, et par la conjecture des quatre couleurs, exactement 4.

4. Polynômes chromatiques Un coloriage propre d'un graphe G avec un ensemble C de r couleurs est une application $f : V(G) \rightarrow C$ telle que si $\{u, v\} \in E(G)$ alors $f(u) \neq f(v)$. Nous désignons par $\chi(G, r)$ le cardinal de l'ensemble de telles applications. Il est bien connu que $\chi(G, r)$ est un polynôme à une seule variable de degré $n = |V(G)|$ avec des coefficients entiers. On l'appelle le polynôme chromatique de G . Pour le confort du lecteur nous reproduisons la preuve ici. Comme conséquence, si $r < k$ où k est le nombre chromatique de G alors $\chi(G, r) = 0$.

Nous nous proposons de déterminer le nombre de façons de colorer la carte du Canada et celle du Maroc avec leurs nombres chromatiques respectifs. Ils sont notés $\chi(G_C, 3)$ et $\chi(G_M, 4)$. Pour cette tâche, nous aurons d'abord besoin de calculer les polynômes chromatiques de quelques sous-graphes de nos graphes. Certains, évidents, ne requérant pas de preuve.

Théorème 1. *Les relations suivantes sont immédiates :*

- 1) $\chi(P_n, r) = r(r-1)^{n-1}$.
- 2) $\chi(C_3, r) = r(r-1)(r-2)$.
- 3) $\chi(K_n, r) = r(r-1)\dots(r-n+1)$.

5. Théorèmes de la réduction chromatique Les théorèmes de la réduction chromatique sont bien connus, mais pour l'aisance du lecteur nous redonnons brièvement leurs démonstrations. Auparavant, précisons les

notations.

Soit $e = \{u, v\}$ une arête d'un graphe G , alors :

1. $G - e$ est le graphe $(V(G), E(G) - e)$.

2. $G \text{ mod } e$ est le graphe G/e obtenu à partir de $G - e$ en identifiant les deux sommets u et v et en supprimant les arêtes répétées si le résultat est un multi-graphe.

Exemple : Soit $e = \{2, 3\}$ l'arête du graphe W_6 représenté en figure 4.

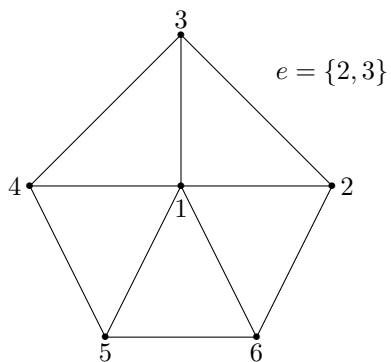


Figure 4

Alors $W_6 - e$ et W_6/e sont illustrés dans la figure 5.

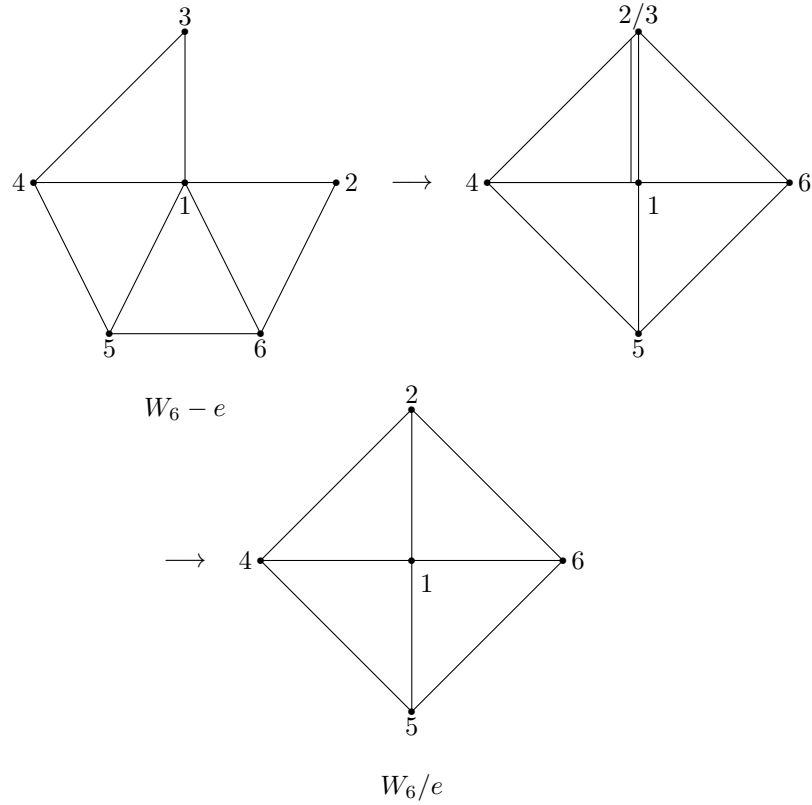


Figure 5

Théorème 1 de la réduction chromatique (TRC 1). Soit $e = \{u, v\} \in E(G)$. On a :

$$\chi(G, r) = \chi(G - e, r) - \chi(G/e, r) \quad (1)$$

Preuve. Il y a deux types de coloriage pour $G - e$: ceux dans lesquels u et v sont colorés différemment et leur nombre est $\chi(G, r)$. Puis ceux dans lesquels u et v ont même couleur et leur nombre est $\chi(G/e, r)$. Il s'en suit que $\chi(G - e, r) = \chi(G, r) + \chi(G/e, r)$. \square

Corollaire 1. $\chi(G, r)$ est un polynôme à une seule variable de degré $n = |V(G)|$ dont les coefficients sont des entiers.

Preuve. Si $|E(G)| = 0$ alors $G \cong D_n$ et par conséquent $\chi(D_n, r) = r^n$. Supposons que $|E(G)| > 0$. Utilisons une récurrence sur $n \geq 1$.

Fixons une arête $e_1 \in E(G)$. Par TRC 1 : $\chi(G, r) = \chi(G - e_1, r) - \chi(G/e_1, r)$. Comme $|V(G/e_1)|$ est $n - 1$, d'après l'hypothèse de récurrence $(G/e_1, r)$ est un polynôme à une seule variable de degré $n - 1$ ayant des coefficients entiers.

Posons $H = G - e_1$ et fixons une arête e_2 , s'il en reste. Encore par TRC 1 :

$$\chi(H, r) = \chi(G - e_1 - e_2, r) - \chi(H/e_2, r).$$

En continuant avec toutes les arêtes e_1, e_2, \dots, e_m , nous aboutissons à : $\chi(G, r) = \chi(D_n, r) +$ un polynôme à une seule variable de degré strictement inférieur à n ayant ses coefficients dans \mathbb{Z} . Puisque $\chi(D_n, r) = r^n$, le résultat s'en suit. \square

Pour le second théorème de la réduction chromatique, nous aurons besoin de la construction suivante.

Soient G_1 et G_2 deux graphes connexes tels que leurs ensembles de sommets respectifs sont disjoints et sans aucun chemin d'un sommet quelconque $u \in V(G_1)$ vers un sommet $v \in V(G_2)$. Supposons que G_1 et G_2 possèdent des sous-graphes isomorphes à un graphe complet K_l . La superposition de G_1 et G_2 sur K_l est le graphe obtenu à partir de G_1 et G_2 en identifiant leurs sous-graphes isomorphes à K_l . La figure 6 illustre deux superpositions non isomorphes G_1 et G_2 dans K_2 .

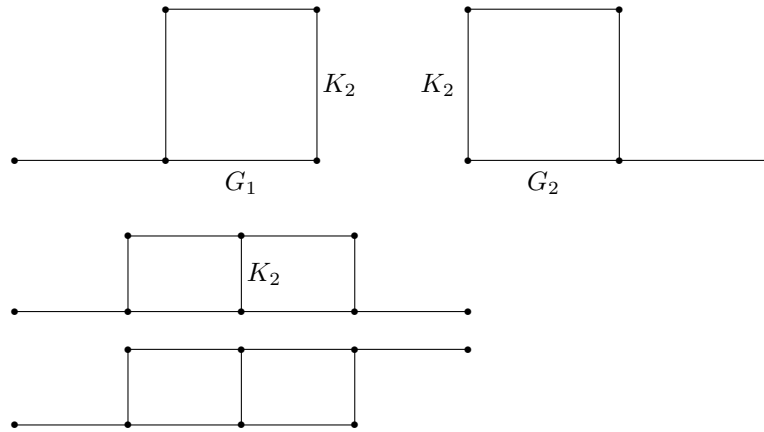


Figure 6 : Superpositions non isomorphes

Théorème 2 de la réduction chromatique (TRC 2). Si G est une superposition des deux graphes G_1 et G_2 sur K_l , alors

$$\chi(G, r) = \frac{\chi(G_1, r)\chi(G_2, r)}{\chi(K_l, r)}. \tag{2}$$

Preuve Observons d'abord que si H est un sous-graphe complet du graphe G , alors le polynôme $\chi(H, r)$ divise le polynôme $\chi(G, r)$. Comme $\chi(K_l, r)$ est un diviseur commun de $\chi(G_1, r)$ et $\chi(G_2, r)$, pour la superposition G le facteur répété $\chi(K_l, r)$ doit-être neutralisé, ce qui prouve (2). \square

Souvent les graphes de pays, et le Maroc en particulier, contiennent des sous-graphes isomorphes aux roues. Nous allons appliquer les deux théorèmes de la

réduction chromatique pour calculer $\chi(W_n, r)$. Si e est une arête sur la jante de W_n , $n \geq 5$, nous désignons par W'_n le graphe $W_n - e$ et nous l'appellerons la roue édentée à n sommets (voir la figure 7 pour $n = 9$).

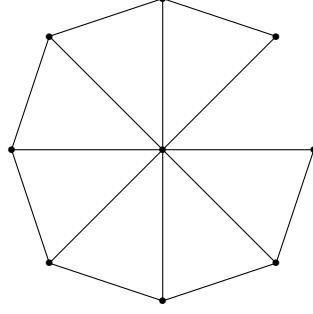


Figure 7 : La roue édentée W'_8

Notons que :

1. $W_n/e \cong W_{n-1}$.
2. W'_n est la superposition de C_3 et de W'_{n-1} sur K_2 .

Théorème 2 : Pour $n \geq 4$, on a

$$\chi(W_n, r) = r[(r-2)^{n-1} - (-1)^n(r-2)] \quad (3)$$

Preuve. Faisons un raisonnement par récurrence. Puisque $W_4 = K_4$ on a $\chi(W_4, r) = \chi(K_4, r) = r(r-1)(r-2)(r-3)$. On vérifie aisément que le membre de droite de la relation (3) est bien $r(r-1)(r-2)(r-3)$. L'énoncé est donc vrai pour $n = 4$.

Pour terminer cette démonstration par récurrence, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. Si $n \geq 4$, alors $\chi(W'_{n+1}, r) = r(r-1)(r-2)^{n-1}$.

Preuve. On peut voir que W'_{n+1} est une superposition de C_3 et de W'_n sur K_2 . Par application répétée du TRC 2, on a :

$$\chi(W'_{n+1}, r) = \frac{\chi(C_3, r)^{n-1}}{\chi(K_2, r)^{n-1}} = \frac{(r(r-1)(r-2))^{n-1}}{(r(r-1))^{n-2}} = r(r-1)(r-2)^{n-1}. \quad \square$$

Nous continuons la démonstration par récurrence du théorème 2. Soit $n \geq 4$. Par TRC 1, le lemme précédent et l'hypothèse de récurrence, on a : $\chi(W_{n+1}, r) = \chi(W'_{n+1}, r) - \chi(W_n, r) = r(r-1)(r-2)^{n-1} - r[(r-2)^{n-1} - (-1)^n(r-2)] = r[(r-2)^n + (-1)^n(r-2)]$, ce qui prouve le théorème 2. \square

Nous aurons aussi besoin de deux résultats, faciles à prouver, sur les polynômes chromatiques.

Un arbre est un graphe connexe à n sommets, $n \geq 2$, sans sous-graphe isomorphe à un cycle.

Théorème 3 : *Si T est un arbre à n sommets, alors $\chi(T, r) = r(r - 1)^{n-1}$.*

Preuve. C'est vrai pour $n = 2$ car $T = K_2$. Supposons que $n \geq 2$ et soit T un arbre à $n + 1$ sommets. Le degré d'un sommet v est le nombre de ses sommets voisins, i.e $deg_g(v) = |\{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}|$. Choisissons un sommet de T de degré 1 ayant u comme seul voisin. Appliquons TRC 1 à T avec $e = \{u, v\}$: $\chi(T, r) = \chi(T - e, r) - \chi(T/e, r)$. Puisque v est déconnecté de tout le reste de l'arbre T , et que T/e est un arbre à n sommets, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\chi(T, r) = r.r(r - 1)^n - r(r - 1)^n = r(r - 1)^n$$

ce qui termine la démonstration. □

Théorème 4 : *Si $n \geq 3$ alors*

$$\chi(C_n, r) = (r - 1)^n + (-1)^n(r - 1). \tag{4}$$

Preuve. Par récurrence. Pour $n = 3$, les deux membres de la relation (4) du théorème sont égaux, donc l'énoncé est vrai pour $n = 3$.

Supposons aussi que c'est le cas pour $n \geq 3$. Par TRC 1 et l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \chi(C_{n+1}, r) &= \chi(P_{n+1}, r) - \chi(C_n, r) \\ &= r(r - 1)^n - [(r - 1)^n + (-1)^n(r - 1)] \\ &= (r - 1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(r - 1), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration par récurrence. □

6. Coloriage des cartes géographiques du Canada et du Maroc Rappelons que le nombre chromatique du Maroc est 4 alors qu'il est seulement de 3 pour le Canada. Par conséquent comme une exécution directe, nous allons en premier calculer le polynôme chromatique pour G_C pour les provinces et territoires du Canada à bords continus (figure 8). Ensuite nous évaluons le polynôme pour $r = 3$ afin de déterminer le nombre de façons de colorer proprement G_C avec 3 couleurs.

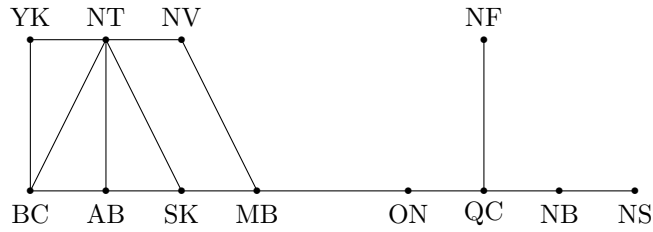


Figure 8 : le graphe G_C

Remarquer que le graphe G_C est la superposition d'un arbre T sur 6 sommets et le graphe K (figure 9) en K_1 .

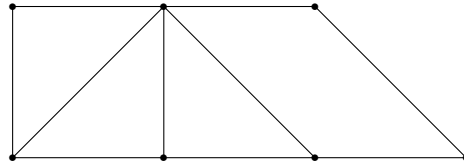


Figure 9 : Le graphe de l'ouest du Canada

Par le TRC 2 et le théorème 3 :

$$\begin{aligned} \chi(G_C, r) &= \frac{\chi(T, r)\chi(K, r)}{\chi(K_1, r)} \\ &= \frac{r(r-1)^5}{r} \chi(K, r) \\ &= (r-1)^5 \chi(K, r). \end{aligned}$$

Maintenons K est une superposition de C_4 et L (voir la figure 10) sur K_2 .

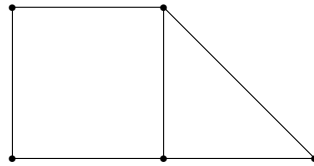


Figure 10 : Le graphe L

Par conséquent par TRC 2 et le théorème 4 :

$$\begin{aligned} \chi(K, r) &= \frac{\chi(C_4, r)\chi(L, r)}{\chi(K_2, r)} \\ &= \frac{(r-1)((r-1)^3+1)\chi(L, r)}{r(r-1)} \\ &= (r^2-3r+3)\chi(L, r). \end{aligned}$$

Finalement par application deux fois du TRC 2 à L , on obtient

$$\begin{aligned} \chi(K, r) &= \frac{(\chi(C_3, r))^3}{(\chi(K_2, r))^2} = \frac{(r(r-1)(r-2))^3}{(r(r-1))^2} \\ &= r(r-1)(r-2)^3. \end{aligned}$$

En regroupant l'ensemble de ces informations, on arrive à

$$\chi(G_C, r) = r(r-1)^6(r-2)^3(r^2-3r+3).$$

Ainsi $\chi(G_C, 3) = 576$.

Comme on l'a dit précédemment, il n'y a pas de moyen de colorier un graphe contenant une roue paire avec 4 couleurs. Nous allons maintenant déterminer le nombre de façons de colorier la carte du Maroc, qui contient la roue paire W_6 , avec 4 couleurs.

Pour le calcul de $\chi(G_M, r)$, nous procédons comme suit :

- G_M est la superposition de K et G (figure 11) sur $K_2 = \{7, 8\}$.

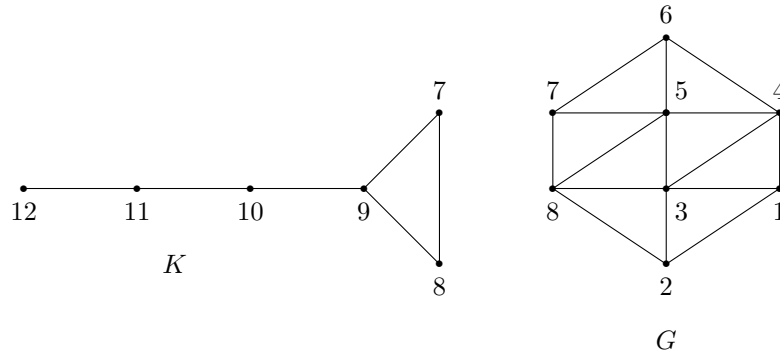


Figure 11

Par TRC 2, $\chi(K, r) = r(r-1)^4(r-2)$. D'où

$$\chi(G_M, r) = (r-1)^3(r-2)\chi(G, r) \tag{5}$$

- Avec $e = \{6, 7\}$, $G - e$ et G/e sont sur la figure 12.

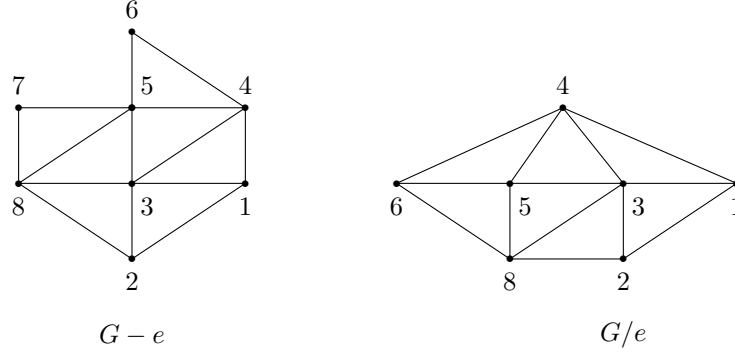


Figure 12

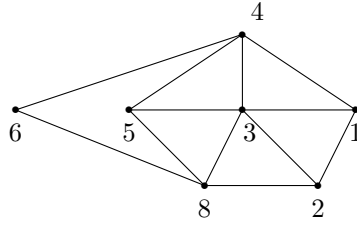
Par TRC 2,

$$\chi(G - e, r) = \frac{(\chi(C_3, r))^2}{(\chi(K_2, r))^2} \chi(W_6, r) = (r - 2)^2 \chi(W_6, r).$$

En prenant $e_1 = \{5, 6\}$, on a :

$$\chi(G/e, r) = \chi(A, r) - \chi(W_6, r)$$

où A est le graphe représenté à la figure 13.

Figure 13 : Le graphe A

Ainsi

$$\chi(G, r) = (r - 2)^2 \chi(W_6, r) - (\chi(A, r) - \chi(W_6, r)). \quad (6)$$

3. Par les relations (5) et (6), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \chi(G_M, r) &= (r - 1)^3 (r - 2) [(r - 2)^2 \chi(W_6, r) - (\chi(A, r) - \chi(W_6, r))] \\ &= (r - 1)^3 (r - 2) [(r^2 - 4r + 5) \chi(W_6, r) - \chi(A, r)]. \end{aligned}$$

Comme $\chi(W_6, r) = r[(r - 2)^5 - (r - 2)]$, on obtient :

$$\chi(G_M, r) = (r - 1)^3 (r - 2) [r(r - 1)(r - 2)(r - 3)(r^2 - 4r + 5)^2 - \chi(A, r)]. \quad (7)$$

Pour le calcul de $\chi(A, r)$, on enlève successivement les arêtes $\{6, 8\}$ puis $\{6, 4\}$ du graphe A de la figure 13 et en appliquant le premier théorème de la réduction chromatique, on trouve :

$$\chi(A, r) = r(r-1)(r-2)^2(r-3)(r^2-4r+6).$$

Finalement, la relation (7) entraîne que le polynôme chromatique du graphe associé à la carte géographique du Maroc est :

$$\chi(G_M, r) = r(r-1)^4(r-2)^2(r-3)[(r^2-4r+5)^2 - (r-2)(r^2-4r+6)]$$

Ainsi le nombre de façons de colorer la carte du Maroc avec $r = 4$ couleurs est :

$$\chi(G_M, 4) = 16\,848.$$

Remarque : Nous pouvons vérifier le dernier résultat grâce à un théorème non publié due à J. Canizales, une étudiante du premier auteur.

Nous désignons par $W_n \wedge W_m$ le graphe obtenu en juxtaposant deux roues dans un graphe $K_4 - e$. Comme exemple dans la figure 12, nous avons $W_5 \wedge W_6$ avec la juxtaposition sur le graphe $K_4 - e$ où $e = \{4, 8\}$.

Théorème 5. Nous avons la relation :

$$\begin{aligned} \chi(W_n \wedge W_m, r) = & \frac{1}{r-1} [r(r-2)(r-3)((r-2)^{n-3} - (-1)^{n-1})((r-2)^{m-3} - (-1)^{m-1}) \\ & + r(r-2)^3((r-2)^{n-4} - (-1)^{n-2})((r-2)^{m-4} - (-1)^{m-2})] \end{aligned} \quad (8)$$

Conclusion. Dans cet article, nous avons déterminé les polynômes chromatiques des graphes associés aux cartes de deux pays à savoir le Canada et le Maroc. Nous avons également calculé de combien de manières on peut colorer ces deux cartes respectivement par 3 et 4 couleurs.

Références

1. R. Diestel, Graph Theory, Springer (1997).
2. F. Harary, Graph Theory, Perseus books, Reading, MA (1969).
3. R. Merris, Graph Theory, John Wiley & Sons, (2011).

Department de Mathématiques, Université de Brigham Young, Provo, UT 84602, USA
courriel: jasbir@math.byu.edu

Laboratoire de Mathématiques, cryptographie, mécanique et analyse numérique, Fstm.
 Université Hassan II de Casablanca, Maroc
courriel: khadir@hotmail.com