

# RÉSOLUTION DU $\partial\bar{\partial}$ POUR LES COURANTS PROLONGEABLES DÉFINIS SUR LA BOULE EUCLIDIENNE DE $\mathbb{C}^n$

SALOMON SAMBOU, ERAMANE BODIAN, ET DIAN DIALLO

Presented by Pierre Milman, FRSC

RÉSUMÉ. On résout le  $\partial\bar{\partial}$  pour les courants prolongeables définis dans la boule euclidienne de  $\mathbb{C}^n$ .

ABSTRACT. We solve the  $\partial\bar{\partial}$ -problem for extendable currents defined on the euclidean ball of  $\mathbb{C}^n$ .

**1. Introduction** Soit  $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$  un ouvert, on se pose la question suivante : Si  $T$  est un courant  $d$ -fermé sur  $\Omega$ , existe-t-il un courant prolongeable sur  $\Omega$  tel que  $\partial\bar{\partial}u = T$  ?

Tenant compte de considérations classiques, nous devons pour répondre à cette question, avoir à résoudre une équation  $(*)du = T$ , où  $T$  est un courant prolongeable, la solution obtenue se décompose en une partie  $\partial$ -fermée et l'autre  $\bar{\partial}$ -fermée. Il est nécessaire d'avoir des conditions géométriques sur  $\Omega$  pour obtenir des solutions du  $\partial$  respectivement du  $\bar{\partial}$  pour les courants prolongeables. Partant de résultats connus de cohomologie de De Rham, nous montrons que si  $\Omega = B(o, r)$  désigne une boule de centre  $o$  et de rayon  $r$ , alors l'équation  $(*)$  admet une solution. La résolution du  $\partial\bar{\partial}$  devient alors une conséquence des résultats de résolution du  $\bar{\partial}$  pour les courants prolongeables obtenus dans [1].

## 2. Préliminaires et notations

*2.1. Définition* Soit  $X$  une variété différentiable,  $\Omega \subset X$  un domaine. Un courant  $T$  défini sur  $\Omega$  est dit prolongeable s'il existe un courant  $\tilde{T}$  défini sur  $X$  tel que  $\tilde{T}|_{\Omega} = T$ .

D'après Martineau [2], si  $\dot{\Omega} = \Omega$  alors les courants prolongeables de degré  $p$  sur  $\Omega$  sont égaux au dual topologique des  $(n - p)$ -formes différentielles de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $X$  à support sur  $\dot{\Omega}$ , où  $n$  désigne la dimension de  $X$ . On note  $\check{D}_X^p(\Omega)$  les  $p$ -courants définis sur  $\Omega$  et prolongeables à  $X$ ,  $D^p(\dot{\Omega})$  les  $p$ -formes différentielles de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $X$  à support dans  $\dot{\Omega}$ . Si  $X$  est une variété complexe de dimension  $n$ , on note  $\check{D}_X^{p,q}(\Omega)$  l'espace des  $(p, q)$ -courants prolongeables définis sur  $\Omega$  et

---

Received by the editors on December 20, 2014; revised May 11, 2015.

AMS Subject Classification: 32F32.

Keywords: Courant prolongeable,  $\partial\bar{\partial}$ , cohomologie de De Rham.

© Royal Society of Canada 2016.

$D^{p,q}(\bar{\Omega})$  l'espace des  $(p,q)$ -formes différentielles à support  $\bar{\Omega}$ . On note  $\check{H}^p(\Omega)$  le  $p^{\text{iem}}$  groupe de cohomologie de De Rham des courants prolongeables définis sur  $\Omega$ ,  $\check{H}^{p,q}(\Omega)$  le  $(p,q)^{\text{iem}}$  groupe de cohomologie de Dolbeault des courants prolongeables définis sur  $\Omega$ . Si  $F \subset X$ , alors  $H_{\infty}^p(F)$  désigne le  $p^{\text{iem}}$  groupe de cohomologie de De Rham des  $p$ -formes différentielles de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  définis sur  $F$ ,  $H_{\infty,c}^p(X)$  est le groupe de cohomologie de De Rham des  $p$ -formes différentielles de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $X$  à support compact et enfin  $\Lambda^p(F)$  l'espace des  $p$ -formes différentielles de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $F$ .

**3. Résolution de l'équation  $du = T$**  On considère dans cette partie que  $X = \mathbb{R}^n$ ,

$$\Omega = B(o, r) =: \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{j=1}^n x_j^2 < 1 \right\}.$$

Le bord  $b\Omega$  de  $\Omega$  est la sphère

$$S^{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{j=1}^n x_j^2 = 1 \right\}.$$

**THEOREM 1.**  $\check{H}^p(B(o, r)) = 0$  pour  $2 \leq p \leq n - 1$ .

Pour établir ce résultat nous allons procéder comme dans [1]. On a besoin du lemme suivant :

**LEMMA 1.**  $D^p(B(o, r)) \cap \ker d = dD^{p-1}(B(o, r))$  pour  $1 \leq p \leq n - 1$

**DÉMONSTRATION.** On utilise les résultats suivants :

$$\begin{aligned} H^p(B(o, r)) &= 0 \text{ pour } p \geq 1 \\ H^p(S^n) &= 0 \text{ pour } p \neq 0 \text{ et } p \neq n, [3, \text{ p. 181, théorème 6.1}] \\ H_c^p(\mathbb{R}^n) &= 0 \text{ pour } p \neq n \text{ et } H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}, [3, \text{ p. 183, théorème 6.7}]. \end{aligned}$$

La situation intéressante pour notre problème est quand  $n > 2$ .

Considérons la suite courte suivante :

$$0 \longrightarrow \Lambda^{\bullet}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^{\bullet}(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) \oplus \Lambda^{\bullet}(\overline{B(o, r)}) \longrightarrow \Lambda^{\bullet}(S^{n-1}) \longrightarrow 0$$

où  $\bullet = 0, 1, \dots, n$ .

On peut écrire en extension :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Lambda^0(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \Lambda^0(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) \oplus \Lambda^0(\overline{B(o, r)}) & \longrightarrow & \Lambda^0(S^{n-1}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^1(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \Lambda^1(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) \oplus \Lambda^1(\overline{B(o, r)}) & \longrightarrow & \Lambda^1(S^{n-1}) \longrightarrow 0 \\
& & \dots & & \dots & & \dots \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^n(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \Lambda^n(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) \oplus \Lambda^n(\overline{B(o, r)}) & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

Sur le plan cohomologique , la suite courte précédente nous donne la suite longue suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) \oplus H^0(\overline{B(o, r)}) & \longrightarrow & H^0(S^{n-1}) & \longrightarrow & \\
H^1(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) \oplus H^1(\overline{B(o, r)}) & \longrightarrow & H^1(S^{n-1}) & \longrightarrow & \dots \\
\longrightarrow & H^{n-1}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) \oplus H^{n-1}(\overline{B(o, r)}) & \longrightarrow & H^{n-1}(S^{n-1}) & \\
\longrightarrow & H^n(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^n(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) \oplus H^n(\overline{B(o, r)}) & \longrightarrow & 0 . & 
\end{array}$$

Tenant compte du fait que  $H^p(B(o, r)) = 0$  pour  $p \geq 1$  et  $H^p(S^n) = 0$  pour  $p \neq 0$  et  $p \neq n$  , on a :

$$\begin{aligned}
H^j(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) &= 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq n-2, \\
H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) &= \mathbb{R} \text{ et } H^n(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) = 0.
\end{aligned}$$

Soit  $f \in D^p(\overline{B(o, r)}) \cap \ker d$ ,  $[f] \in H_c^p(\mathbb{R}^n) = 0$  pour  $p \neq 0$  et pour  $1 \leq p \leq n-1$  , il existe une  $(p-1)$ -forme différentiable  $g$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $dg = f$  et  $dg|_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(o, r)}} = 0$  . Si  $p = 1$  , alors  $g$  est une constante à support compact sur  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(o, r)}$  donc  $g = 0$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)$  i.e  $g \in D^0(\overline{B(o, r)})$  avec  $dg = f$ .

Si  $1 < p \leq n-1 \Rightarrow 1 \leq p-1 \leq n-2$  , on a  $H^{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(o, r)}) = H^{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)) = 0$  [3, théorème 6.7], il existe donc une  $(p-2)$ -forme différentielle  $h$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(o, r)$  telle que  $dh = g$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(o, r)}$  . Soit  $\tilde{h}$  une extension  $C^\infty$  de  $h$  à  $\mathbb{R}^n$  ,  $u = g - d\tilde{h}$  est une  $(p-1)$ -forme différentiable de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  à support sur  $\overline{B(o, r)}$  et  $du = f$ .  $\square$

On peut donc établir la preuve du théorème :

DÉMONSTRATION. Soit  $T \in \check{D}_{\mathbb{R}^n}^p(B(o, r)) \cap \ker d$  ,  $2 \leq p \leq n-1$ .

Posons  $L_T : dD^{n-p}(\overline{B(o, r)}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$d\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$$

$L_T$  est bien définie car  $dD^{n-p-1}(\overline{B(o, r)}) = D^p(\overline{B(o, r)}) \cap \ker d$ .

Si  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont deux  $(n-p)$ -formes différentielles telles que  $d\varphi = d\varphi'$  , alors il existe  $\theta \in D^{n-p-1}(\overline{B(o, r)})$  telle que :

$$\varphi - \varphi' = d\theta \text{ et } \langle T, d\theta \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle T, d\theta_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi' \rangle.$$

Où  $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $D^{n-p-1}(B(o, r))$  qui converge uniformément vers  $\theta$ .

$L_T$  est linéaire car  $d : D^{n-p}(\overline{B(o, r)}) \rightarrow dD^{n-p}(\overline{B(o, r)})$  est une application linéaire continue et surjective entre deux espaces de Fréchet.

Pour voir que  $L_T$  est continue, il suffit de voir que l'image réciproque d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  par  $L_T$  est un ouvert. En effet on a  $L_T o d = T$  d'où  $L_T^{-1}(U) = doT^{-1}(U)$ , par conséquent on peut étendre  $L_T$  en un opérateur linéaire continu

$\tilde{L}_T : D^{n-p+1}(\overline{B(o, r)}) \rightarrow \mathbb{C}$ , c'est un courant prolongeable et  $d\tilde{L}_T = (-1)^{n-p}T$  et  $\langle d\tilde{L}_T, \varphi \rangle = (-1)^{n-p}\langle L_T, d\varphi \rangle = (-1)^{n-p}\langle T, \varphi \rangle$ . D'où  $S = (-1)^{n-p}L_T$  est un courant prolongeable solution de  $du = T$ .  $\square$

*Remark 1.* Nous avons utilisé dans la preuve du théorème le fait que  $B(o, r)$  est un domaine étoilé de  $\mathbb{R}^n$  avec un bord vérifiant  $H^j(bB(o, r)) = 0$ ,  $1 \leq j \leq n-2$ . Le théorème reste vrai avec une preuve identique pour tout domaine étoilé  $\Omega$  à bord vérifiant  $H^j(b\Omega) = 0$  avec  $1 \leq j \leq n-2$ .

On ne sait pas cependant si pour un domaine étoilé quelconque ce théorème est vrai.

**4. Résolution du  $\partial\bar{\partial}$  pour les courants prolongeables** Tenant compte du théorème 1 et des résultats de résolution du  $\bar{\partial}$  pour les courants prolongeables obtenus par [1], on a le théorème suivant :

**THEOREM 2.** *Soit  $T$  un  $(p, q)$ -courant prolongeable défini sur la boule euclidienne  $B(o, r) \subset \mathbb{C}^n$ . Supposons que  $dT = 0$ ;  $1 \leq p \leq n$  et  $1 \leq q \leq n$ , alors il existe un  $(p-1, q-1)$ -courant  $S$  défini sur  $B(o, r)$ , prolongeable tel que  $\partial\bar{\partial}S = T$ , pour  $2 \leq p+q \leq 2n-1$ .*

*Remark 2.* Ce résultat reste vrai pour tout domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ , étoilé, strictement pseudo-convexe avec  $H^j(b\Omega) = 0$  pour  $1 \leq j \leq 2n-1$ .

On ne sait pas s'il est vrai pour un domaine étoilé strictement pseudo-convexe de  $\mathbb{C}^n$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $T$  un  $(p, q)$ -courant,  $1 \leq p \leq n$  et  $1 \leq q \leq n$ ,  $d$ -fermé défini sur  $B(o, r)$  et prolongeable avec  $2 \leq p+q \leq 2n-1$ .

Puisque d'après le théorème 1  $\tilde{H}^{p+q}(B(o, r)) = 0$ , il existe un courant prolongeable  $h$  défini sur  $B(o, r)$  tel que  $dh = T$ .

$h$  est un  $(p+q-1)$ -courant, il se décompose en un  $(p-1, q)$ -courant  $h_1$  et en un  $(p, q-1)$ -courant  $h_2$ . On a  $dh = d(h_1 + h_2) = dh_1 + dh_2 = T$ .

Comme  $d = \partial + \bar{\partial}$ , on a pour des raisons de bidegré  $\partial h_2 = 0$  et  $\bar{\partial} h_1 = 0$  et d'après le théorème principal dans [1],  $h_1 = \bar{\partial}u_1$  et  $h_2 = \partial u_2$  avec  $u_1$  et  $u_2$  des courants prolongeables définis sur  $B(o, r)$ .

On a :  $T = \partial h_1 + \bar{\partial} h_2 = \partial\bar{\partial}u_1 + \bar{\partial}\partial u_2 = \partial\bar{\partial}(u_1 - u_2)$

Posons  $S = u_1 - u_2$ ,  $S$  est un  $(p-1, q-1)$ -courant prolongeable défini sur  $B(o, r)$  tel que  $\partial\bar{\partial}S = T$ .  $\square$

## Références

1. M. S. Sambou : Résolution du  $\bar{\partial}$  pour les courants prolongeables. *Math. Nachrichten* **235** (2002), 179–190.
2. A. Martineau : Distributions et valeurs au bord de fonctions holomorphes. Strasbourg RCP **25** (1966).
3. C. Godbillon : Topologie algébrique , Hermann Paris , 1971.

Université Assane SECK de Ziguinchor, Sénégal

*courriel:* [ssambou@univ-zig.sn](mailto:ssambou@univ-zig.sn), [eramane20era@yahoo.fr](mailto:eramane20era@yahoo.fr), [diandiallo1086@yahoo.fr](mailto:diandiallo1086@yahoo.fr)